

# 标量光场平面屏衍射的矩阵理论

## (I) 光场表示

李先枢  
(物理学系)

### 摘 要

本文提出了一种新的光场表示方法,并证明这方法能表示范围很广泛的标量光场。和已有的方法<sup>[2,5,6]</sup>比较,这个新方法的优点是方便使用的范围广;能保证在普遍情形下、在任意给定的误差范围内,表征光学系统作用的矩阵可截取为有穷阶;它能够明显地显示场分布的对称性质、空间局限性质,并可表示场在自由空间内的三维分布。在这个光场表象中,光场用序列空间 $l_1$ 的一个元素表示,光学系统的作用由一个作用矩阵表征。在线性光学范围内,这个矩阵与入射和衍射光场无关。文中还给出了复合光学系统的作用矩阵与各组成系统的作用矩阵间的关系。

### (一) 引 言

本组工作的目的是提出一个入射场包括范围广泛的单色标量波场的、平面屏系统(重点是共轴圆开孔系统)的衍射的矩阵理论。

鉴于基尔霍夫衍射理论<sup>[1,2,3]</sup>久经实验检验,公认精度很高,应用广泛,我们将以它作为自己的依据。然而费涅耳—基尔霍夫衍射公式<sup>[1]</sup>只是以单个球面波为其直接讨论对象,不能作为我们的出发点。

作者认为一个矩阵形式的衍射理论除方便应用电子计算机外,还可以有许多别的优点。如果衍射矩阵被证明可截取为有穷阶,那么它将便于解决逆衍射问题;便于求解光学谐振腔中的自洽场问题<sup>[4]</sup>;……特别是应用矩阵代数,可使在普遍情形下解决复杂衍射系统——由多个多孔衍射屏相继衍射组成的系统——的衍射问题成为实际可能。它还可使入射场分布、衍射场坐标、衍射系统性质等,在衍射公式中彻底分离开来,从而大大方便单独研究上述各个因素的影响。

由于复杂衍射系统中既包含了单孔的衍射作用,不同开孔衍射光间的多光束干涉作用,又包含了不同衍射屏间的“空间光滤”作用,因此,对它们的研究可能有较大的意义。

最近 M. Novotný (1977)<sup>[5]</sup>和 J. Komrska (1979)<sup>[6]</sup>等工作,可看作是表现了衍射理论向矩阵形式方面发展的趋势,但至今还没有一个较普遍的矩阵形式的衍射理论。

联想到傅里叶光学中光场表示方法的关键作用,可以明白,为建立一个较为普遍、实用和完整的衍射的矩阵理论,光场表示(即分解光场)方法,仍然是关键所在。它必须:第一,能用有穷个(在常见情形个数不能太多)复数近似描述任一垂直光传播轴平面(无穷个点!)上的任意单色光场;第二,必须保证任意光学系统的衍射矩阵在普遍情形下可截取为有穷阶。较常见的已有光场表示方法一般不满足上述要求。因此,有必要在这里提出一个新的方法。

## (二) 光场表示

(1)讨论这样一个单色光场,它有一个光传播轴——取为 $z$ 轴,我们只关心它在垂直 $z$ 轴的平面上的场分布,并用柱坐标表示的函数 $\Phi'(\rho, \varphi, z)$ 来描述它。由于光场所携带的能量总是有限的,因此在任一上述平面内, $\Phi'$ 必然平方可积,而且功率流密度不很近于零的区域也必定有界。在上述平面上实际上所能观测的区域也有界。在某有限大区域以外功率流密度极近于零的场,实际上可以忽略。于是为了数学上的便利,我们取 $\Phi'$ 在上述有限大区域内表示要研究的单色标量波场,而在上述区域之外,则取它为某一迅速下降以至总可以当成零的、某一适宜的、连续可微函数。这样作显然无损于结果的适用范围。本文将只讨论可以用这样的函数 $\Phi'$ 描述的光场,并简称为“仅有一个传播轴的任意单色标量光场。”

(2)为表示这一光场,引入一参照(高斯)光场

$$u_G(\xi^2, z) = E_0 \frac{w_0}{w} \exp \{ -j(kz - \varphi) - \xi^2/2 \} = u_G(0, z) e^{-\xi^2/2}. \quad (2.1)$$

其中

$$\xi = \sqrt{\frac{2}{q}} \rho, \quad q^{-1} = \frac{1}{w^2} + j \frac{k}{2R} = \frac{1}{w_0 w} e^{j\varphi}. \quad (2.2)$$

这里选高斯光束腰部平面坐标为 $z=0$ ,  $w_0$ 、 $w$ 、 $R$ 、 $q$ 、 $\varphi$ 等为人们熟知的高斯光束参数<sup>(4)</sup>(<sup>(4)</sup>中的 $q$ 本文写为 $jkq/2$ )。把坐标 $\rho$ 变换为 $\xi$ , 令

$$\Phi(\xi, \varphi, z) \equiv \Phi'(\rho, \varphi, z). \quad (2.3)$$

注意:(2.1)的参数是任意选择的,选择的标准只是方便。在本文表示方法中,用不同参照光场 $u_G(\xi^2, z)$ 表示的 $\Phi(\xi, \varphi, z)$ 的各表示式间,容易互相转换。

(3)把光场表示为如下的形式(当 $|\xi| < +\infty$ )

$$\Phi(\xi, \varphi, z) = \sum_{s=\pm 1} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^{(sl)}(z) \Psi_n^{(sl)}(\xi, \varphi, z). \quad (2.4)$$

我们把 $\Psi_n^{(sl)}(\xi, \varphi, z)$ 称为以 $sln$ 标志的元模场。

$$\Psi_n^{(sl)}(\xi, \varphi, z) = \phi_{ln}(\xi, z) e^{jsl\varphi}. \quad (2.5)$$

$$\phi_{ln}(\xi, z) = \frac{\sqrt{2(n+l/2)\pi}}{\Gamma(n+l/2+1)} (\xi^2/2)^{n+l/2} u_G(\xi^2, z). \quad (2.6)$$

上式中当 $l+n=0$ ,  $\sqrt{2(n+l/2)\pi}$ 应取为1。令

$$C_{sl}(\xi, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^{(sl)}(z) \phi_{ln}(\xi, z) \quad [\text{注1}] \quad (2.7)$$

则有

$$\Phi(\xi, \varphi, z) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=-1}^{\infty} C_{sl}(\xi, z) e^{jsl\varphi} \quad (2.8)$$

显然  $C_{sl}(\xi, z)$  是  $\Phi(\xi, \varphi, z)$  按  $\varphi$  展开的傅里叶系数。

(4) 显然函数

$$f_{sl}(\xi, \varphi, z) = C_{sl}(\xi, z) e^{jsl\varphi} = f_{sl}\left(\xi, \varphi + \frac{2\pi}{l}, z\right). \quad (2.9)$$

取  $l$  为  $pl$  时 ( $p=0, 1, 2, \dots$ )  $f_{sl}$  的线性组合

$$\sum_{p=0}^{\infty} f_{s(2p+1)}(\xi, \varphi, z) = \sum_{p=0}^{\infty} f_{s(2p+1)}\left(\xi, \varphi + \frac{2\pi}{l}, z\right). \quad (2.10)$$

为  $C_{l-}$  轴对称或称  $l-$  次轴对称函数。  $C_{\infty-}$  轴对称的函数，我们称为理想轴对称的。  $l$  为奇的函数

$$\sum_{p=0}^{\infty} f_{s(2p+1)}(\xi, \varphi, z) = - \sum_{p=0}^{\infty} f_{s(2p+1)}(\xi, \varphi + \pi, z) \quad (2.11)$$

是对极点反对称的，而  $\sum_{p=0}^{\infty} f_{s(2p)}(\xi, \varphi, z)$  是中心对称的。于是由(2.4)中  $\alpha_n^{(sl)}(z)$

随  $l$  的变化，容易直观地判定  $\Phi(\xi, \varphi, z)$  的轴对称性质。

(5) 容易证明  $|\Psi_n^{(sl)}(\xi, \varphi, z)| = |\phi_{ln}(\xi, z)|$  的最大值在

$$\rho_m^{(ln)} = \sqrt{n+l/2} w \quad (2.12)$$

处，绝对值为

$$|\phi_{ln}(\xi, z)|_m = \left(\frac{w}{w_0}\right)^{n+l/2} E_0 \frac{w_0}{w}. \quad (2.13)$$

$|\phi_{ln}(\xi, z)|$  在  $\rho_m^{(ln)}$  两边都是单调下降的。当

$$\rho = b \rho_m^{(ln)} = b \sqrt{n+l/2} w, \quad (b > 0), \quad (2.14)$$

$$|\phi_{ln}(\xi, z)| = [eb^2 w / eb^2 w_0]^{n+l/2} E_0 \frac{w_0}{w}. \quad (2.15)$$

可见  $|\phi_{ln}(\xi, z)|$  显异於零的区域为一环形区域。当  $(n+l/2)$  较大时，其边界由下面  $b$  值决定

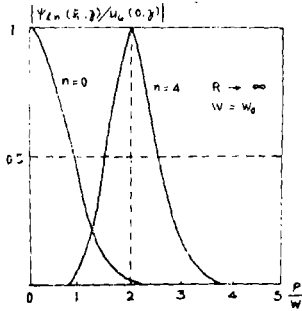
$$b_{\min} \approx [w_0 / ew]^{1/2} \quad (2.16)$$

$$b_{\max} \approx [1 + 2 \ln b_{\max} + \ln w / w_0]^{1/2} \approx [3 + \ln \frac{w}{w_0}]^{1/2}. \quad (2.17)$$

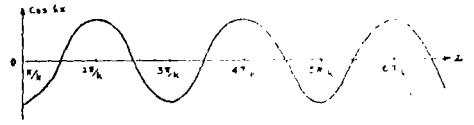
[注1] 因(2.9)中  $f_{sl} = C_{sl}(\xi, z) e^{jsl\varphi}$  是空间单值函数，故  $f_{sl}(-\xi, \varphi, z) = f_{sl}(\xi, \varphi + \pi, z) = (-1)^l f_{sl}(\xi, \varphi, z)$ 。而  $C_{sl}(-\xi, z) = (-1)^l C_{sl}(\xi, z)$ ，所以  $\xi^{-l} C_{sl}(\xi, z)$  只与  $\xi^2$  有关。

因此，由 $|\alpha_n^{(sl)}(z)|$ 随 $n$ 的变化，可以判断 $\Phi(\xi, \varphi, z)$ 径向分布的特点。由 $\alpha_n^{(sl)}(z)$ 的大小变化与变号等可判断零点的大致位置。特别是当参照光场选择比较适宜时（例如，光斑半径 $w$ 选得适当小），以上判断往往十分直观、简单。图 1a 绘出 $|\Psi_{ln}(\xi, z)|$ 随 $|\xi|$ 分布的例子，并与<sup>[2,5,6]</sup>中相应的函数分布(图1b—1d)作对比。可见在这方面，本文的光场表示方法是较优越的。

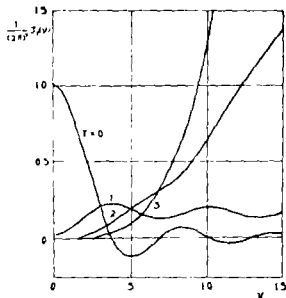
(6) 据(2.4)、(2.7)、(2.9)，光场 $\Phi(\xi, \varphi, z)$ 及 $f_{sl}(\xi, \varphi, z)$ 可分别用数列（规定一定的顺序）



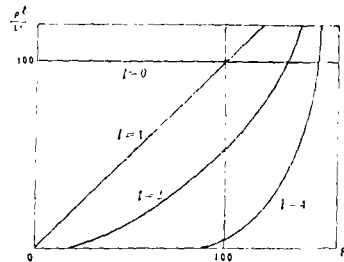
a. 本文光场表示方法中元模场径向分布示例



b. 傅立叶光学<sup>[2]</sup>中，用来表示光场（或函数）的基本函数示例



c. M. Novotný (1977)<sup>[5]</sup>用来表示衍射场的基本函数示例



d. J. Lomrska (1979)<sup>[6]</sup>用来表示夫琅和费衍射场的基本函数示例

图 1 本文和已有工作<sup>[2,5,6]</sup>中，用来表示光场的基本函数的径（或横）向分布的比较

$$[X] = [\alpha_0^{(0)}, \alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \dots; \alpha_0^{(-1)}, \alpha_1^{(-1)}, \alpha_2^{(-1)}, \dots; \alpha_0^{(1)}, \alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(2)}, \dots; \dots] \tag{2.18}$$

及

$$[X^{(sl)}] = [\alpha_0^{(sl)}, \alpha_1^{(sl)}, \alpha_2^{(sl)}, \dots] \tag{2.19}$$

表示。如果 $\Phi(\xi, \varphi, z)$ 满足狄义赫利条件，则(2.8)右边无穷级数绝对且一致收敛。由于所需讨论的光场范围有限，即 $|\xi|$ 有界，故(2.7)右边的无穷级数绝对且一致收敛——

$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^{(sl)} \Psi_{ln}(\xi, z) u_C^{-1}(\xi^2, z)$ 为 $C_{sl}(\xi, z) u_C^{-1}(\xi, z)$ 的泰勒级数，其中 $\xi$ 的某些幂次项系数

为零可看作对  $C_{sl}(\xi, z)$  性质的假定。于是在一个给定的任意小误差范围内, (2.4) 可简化

为  $\Phi(\xi, \varphi, z) = \sum_{sl=-L}^L \sum_{n=0}^{Nsl} \alpha_n^{(sl)} \Psi_n^{(sl)}(\xi, \varphi, z)$ 。而光场表示式 (2.18)、(2.19) 可简写为

(注意不要求:  $\sum_{n=Ns_l+1}^{\infty} \alpha_n^{(sl)}$  收敛)

$$[X] = [\alpha_0^{(0)}, \alpha_1^{(0)}, \dots, \alpha_{N_0}^{(0)}, \alpha_0^{(-1)}, \alpha_1^{(-1)}, \dots, \alpha_{N_1}^{(-1)}, \dots, \alpha_0^{(L)}, \alpha_1^{(L)}, \dots, \alpha_{N_L}^{(L)}]. \tag{2.20}$$

及

$$[X^{(sl)}] = [\alpha_0^{(sl)}, \alpha_1^{(sl)}, \alpha_2^{(sl)}, \dots, \alpha_{Nsl}^{(sl)}]. \tag{2.21}$$

我们可以在 (2.20) 的  $\alpha_{N_L}^{(L)}$  以后、(2.21) 的  $\alpha_{Nsl}^{(sl)}$  以后加上无穷个“0”, 而把  $[x]$ 、 $[x^{(sl)}]$  看作某一无穷维序列空间的一个元素, 并且 (在线性光学中)

$$[X] \in l_1, [X^{(sl)}] \in l_1. \tag{2.22}$$

也可把  $[x]$  和  $[x^{(sl)}]$  近似看作某有穷维空间的元素。

### (三) 例

下面的例可以具体表明本文光场表示方法的适用范围。

(1) 已知在无源稳定光学谐振腔中, 当费涅耳数  $\tilde{N} \rightarrow \infty$  时, 以柱坐标表示的 TEM<sub>p</sub> 模场分布为<sup>(4)</sup>

$$F_{lp}(\rho, \varphi, z) = \left\{ \left( \frac{\sqrt{2\rho}}{w} \right)^l L_p^{(l)} \left( \frac{2\rho^2}{w^2} \right) e^{-\rho^2/w^2} \right\} e^{-j\rho^2 k / 2R} u_G(0, z) e^{\pm j l \varphi} f_{lp}(z), \dots \tag{3.1}$$

其中  $L_p^{(l)}(x) = \sum_{\nu=0}^p (-1)^\nu \binom{l+p}{l+\nu} \frac{x^\nu}{\nu!}$  为广义 Laguerre 多项式,  $u_G(\xi^2, z) =$

$e^{-\rho^2 \left[ \frac{1}{w^2} + j \frac{k}{2R} \right]}$   $u_G(0, z)$  为谐振腔理想高斯模场; 容易把 (3.1) 表示为 (2.4) 的形式

$$F_{lp}(\rho, \varphi, z) = \sum_{n=0}^p \alpha_n^{(sl)}(z) \Psi_n^{(sl)}(\xi, \varphi, z). \tag{3.2}$$

$$\alpha_n^{(sl)}(z) = (-1)^n \frac{\binom{l+p}{l+n} \Gamma(n+l/2+1)}{n! \sqrt{2\pi(n+l/2)}} \left( \frac{2q}{w^2} \right)^{n+l/2} [f_{lp}(z)]. \tag{3.3}$$

这里参照高斯光场即为理想高斯模场  $u_G(\xi^2, z)$ 。注意 (3.2) 中  $n \leq p$ 。显然  $\Psi_n^{(sl)}(\xi, \varphi, z)$  亦可表示为 (3.1) 的线性组合。并且  $p \leq n$  (3.3) 还大致示出了 (3.2) 即 (3.1) 的节点位置、数目与光场分布范围等。

(2) 前述光学谐振腔中, 以直角坐标表示的振荡模场分布为

$$E_{mn}(x, y, z) = H_n \left( \sqrt{\frac{x}{2}} \frac{x}{w} \right) H_m \left( \sqrt{\frac{y}{2}} \frac{y}{w} \right) e^{-(x^2+y^2)/q} f_{mn}(z). \tag{3.5}$$

其中Hermite多项式为

$$H_n(x) = n! \sum_{\nu=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^\nu (2x)^{n-2\nu}}{\nu! (n-2\nu)!} \tag{3.6}$$

易证

$$\frac{1}{n!} H_n\left(\frac{\sqrt{2}\zeta}{w}\right) = \sum_{l=0}^n \xi^l \left(\frac{q}{w^2}\right)^{l/2} \left(e^{jl\varphi} + b^l e^{-jl\varphi}\right) a^l \cdot \sum_{k=0}^{(n-l)/2} h_{nlk} \frac{(\xi^2)^k}{k!} \left(\frac{q}{w^2}\right)^k \tag{3.7}$$

其中当 $\zeta = x$ , 则 $a = b = 1$ ; 当 $\zeta = y$ , 则 $a = -j$ ,  $b = 1$ , 而

$$h_{nlk} = \frac{1}{2} (2 - \delta_{l0}) \cos[(n-l)\pi/2] \frac{(-1)^{(n-l)/2} (-1)^k}{(\Gamma^{\frac{n-l}{2}} - k + 1)(l+k)!} \tag{3.8}$$

由此可见, 若取理想高斯模为参照光场, (3.5)亦可表示为(2.4)的形式. 而且(3.7)中有 $l+2k \leq n$ . (3.7)的对称性质据(3.8)由 $n$ 决定. 由(3.7)与(3.8)还可看出场分布 $H_n(x) e^{-x^2/w^2}$ 的大致空间范围以及节点的数目与位置等.

若某函数可以用函数系(3.1)或(3.5)展开且无穷级数一致收敛, 那么给定一个任意小误差, 该函数就可以用函数系(3.1)或(3.6)的有限多项的线性组合来表示. 因此也必定可以用本文光场表示方法, 在同样的误差范围内, 用有限多个系数表示. (3.1)中 $\{ \}$ 内函数及 $H_n\left(\frac{2\xi}{w}\right) e^{-\xi^2/w^2}$ 均组成正交完备函数系( $p = 0, 1, 2, \dots$ ; 及 $n = 0, 1, 2, \dots$ ), 能用它们组成的一致收敛级数来表示的函数的条件, 在[8]第VI章第9节中有详细讨论. 适当选择 $\Phi(\xi, \varphi, z)$ 在 $|\xi| \rightarrow \infty$ 时的性质, 本文§2.1中所讨论的所有光场函数便都能以这些函数系表示, 因而可用本文方法表示. 由此得出结论: 用本文方法能以任意小误差, 表示垂直光传播轴平面上仅有一个传播轴的任意单色标量波场.

(3)人们常把任意光场表示为不同方向传播的平面波的叠加. 例如在讨论光场的量子化时在傅里叶光学中. 设某 $z$ 为常数的平面上, 光场可表示为

$$\Phi(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} A(k_x, k_y, z) e^{j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \tag{3.9}$$

因为

$$x^\nu y^p = i^p \left(\frac{\rho}{2}\right)^{p+\nu} \sum_{m'=0}^{\nu} \sum_{n'=0}^p (-1)^{n'} \binom{\nu}{m'} \binom{p}{n'} e^{j(p+\nu-2(m'+n'))\varphi} \tag{3.10}$$

显然, 令

$$|p + \nu - 2(m' + n')| = l, \quad p + \nu = 2m + l \tag{3.11}$$

(3.9)可写为如下形式

$$\Phi(x, y, z) = \Phi'(\rho, \varphi, z) = \sum_{s_l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m^{(s_l)} \rho^{2m+l} e^{js_l\varphi} \tag{3.12}$$

只要光场函数 $\Phi'(\rho, \varphi, z)$ 满足本文 § 2.1 的条件, (3.12) 必然绝对且一致收敛. (3.12) 与 J. Komrska(1979)<sup>[6]</sup> 中衍射场的表示式(2)是一致的. 它可以看成(2.4)的一种特殊情况: 取参照高斯光场  $u_c(\xi^2, z) = 1 \cdot \frac{\sqrt{2\pi(n+l/2)}}{\Gamma(n+l/2+1)} \alpha_m^{(s'l)} q^{-(2m+l)} = \beta_m^{(l)}$ . 也可以进一步化(3.12)为取任意参照高斯光场的(2.4)式.

(3.9) 与本组工作(Ⅱ)中相应的衍射公式形式上完全一样( $k_x, k_y$  分别以  $x', y'$  代换). 在本组工作(Ⅱ)和(Ⅲ)中将具体证明它可化为(2.4)的形式. 即  $\Phi(x, y, z)$  可用本文方法表示[注2].

(4) 利用关系式<sup>[7]</sup>

$$J_l[2(xt)^{l/2}] = (xt)^{l/2} e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^{(l)}(x)}{\Gamma(n+l+1)} t^n. \quad (3.13)$$

可以证明: 圆孔的夫琅和费衍射场和所有能用 M. Novotný(1977)<sup>[6]</sup> 的级数表示的衍射场, 都能用本文方法表示.

此外直边的费涅耳衍射积分<sup>[1]</sup>等也可用本文方法表示. …….

## (四) 作用矩阵

(1) 设有一个光学系统, 它有一个输入(平)面和一个输出(平)面. 都选择得与光传播轴垂直. 又设不须考虑该系统对单色光频率的影响. 我们所关心的该系统的作用, 仅仅是它把输入面上的光场 $[x]$ 转变为输出面上的光场 $[x']$ (为表示二个面上的光场所采用的参照光场可以不同, 例如分别取  $u_c(\xi^2, z)$  与  $u'_c(\xi'^2, z')$ ). 假设线性光学适用, 即假设该光学系统的作用可表示为一线性算子. 那么, 根据光的线性叠加原理, 容易证明, 这个系统的作用必然可用一个矩阵  $A$  来表示, 有

$$[x'] = A[x] \quad (4.1)$$

其中  $A$  的每一个元素  $A_{mn}$  都有一定的物理意义, 原则上可以测量. 由光的线性叠加原理可证  $A$  与  $[x]$  无关, 即与入射光场无关. 在选定  $u_c(\xi^2, z)$  及  $u'_c(\xi'^2, z')$  和输入与输出面后, 唯一地由光学系统本身的性质决定. 而系统的作用也完全由矩阵  $A$  表徵. 称  $A$  为该光学系统的作用矩阵. 显然平面衍射屏属于这样的系统, 通常选取开孔平面为输入面, 观察屏为输出面.

节(五)中我们将说明, 在最普遍情况下, 作用矩阵都可截取为有穷阶. 而在本文第Ⅲ部份中将严格证明衍射矩阵可截取为有穷阶.

(2) 设有  $M$  个上述光学系统  $T_i (i=1, 2, \dots, M)$ , 可选择有一对共同的输入与输出平面, 设它们各自单独存在时, 其作用矩阵为  $A_i$ , 有

$$[x'_i] = A_i(x), \quad i=1, 2, \dots, M. \quad (4.2)$$

[注2] (3.9) 在形式上也与[6]中的衍射公式一致, 实际上[6]中便已表明它可化为(3.12)的形式.

又假定它们共同存在时,各自对输入面上场的作用是完全独立的,那么此时输出面上场应为

$$[x'] = \sum_{i=1}^M [x'_i] = A[x] \quad (4.3)$$

其中

$$A = \sum_{i=1}^M A_i \quad (4.4)$$

为这个复合系统的作用矩阵。称这种复合系统为相加(光学)系统。它的作用矩阵即为各组成系统作用矩阵之和。因 $A_i$ 可取为有穷阶,故 $A$ 亦可取为有穷阶。

(3) 设有另一类 $M$ 个光学系统 $D_i (i=1,2,\dots,M)$ ,其中 $D_{i+1}$ 的输入面正好选为 $D_i$ 的输出面。同一面上只选一个参照光场。设 $D_i$ 的作用矩阵为 $A_i$ ,其输入与输出面上光场矢量为 $[x_i]$ 与 $[x'_i]$ ,那么

$$[x'_i] = A_i[x_i], \quad (4.5)$$

$$[x'_i] = [x_{i+1}]. \quad (4.6)$$

若取整个复合系统的输入面为 $D_1$ 的输入面,输出面为 $D_M$ 的输出面。令 $[x] = [x_1]$ ,  $[x'] = [x'_M]$ ,为复合系统的输入与输出光场矢量,据(4.5)、(4.6)可证

$$[x'] = \left( \prod_{i=1}^M A_i \right) [x] = A[x] \quad (4.7)$$

称这种复合系统为相乘系统,它的作用矩阵 $A$ 由(4.7)得

$$A = \prod_{i=1}^M A_i \quad (4.8)$$

因 $A_i$ 为有穷阶,故 $A$ 亦为有穷阶。

(4) 设有相乘系统 $D$ 由二个光学系统 $D_1$ 与 $D_2$ 组成,其作用矩阵分别为 $A_1, A_2$ ,复合系统作用矩阵设为 $A$ 。若

$$A_2 = A_1^{-1} \quad (4.9)$$

则应有

$$A = A_1 \cdot A_2 = I. \quad (4.10)$$

设 $D$ 的输入面上场为 $[x]$ ,则其输出面上场应为

$$[x'] = A[x] = [x]. \quad (4.11)$$

假设此时 $D$ 输入面上所选参照光场参数为 $W, R$ ,输出面上所选参数为 $W', R'$ ,且有

$$\frac{W^2}{R} = \frac{W'^2}{R'}. \quad (4.12)$$

则此时 $D$ 的输出面上的场复振幅分布按比例 $\frac{W'}{W}$ 放大或缩小后,必与其输入面上场分布全同。若能求出系统作用矩阵 $A_i$ 与其结构参数的关系,那么给出 $D_i$ 的结构,原则上就能求

出 $D_2$ 的结构。

平面多孔衍射屏是相加复合系统的例子。如果只考虑共轴圆形孔衍射,那么各透光环具有任意复振幅透射系数、位置和宽度的多环衍射屏就是这种复合系统,特例有费涅耳波带片。一系列衍射屏接续衍射所组成的衍射系统,是相乘复合系统的例子,特例有三维光栅。

## (五) 讨 论

以上结果表明,应用本文光场表示,必导致整个光传播理论(不须考虑频率的变化时),包括衍射理论,取矩阵形式。要使这种矩阵理论较普遍、实用和比较完全,并不是把光场表示为任一种级数都可以的。下面就此将本文与已有工作[2,5,6]相比较。

第一、本文光场表示方法,有广泛的适用范围,已证明能表示有一个传播轴的任意标量光场。这样我们就能保证:任意平面屏的衍射场及这个衍射场的衍射,均可以表示为本文场表示式及相应的矩阵公式。这样(4.4)与(4.8)才能成立,才较便于处理较复杂系统的衍射问题,也才是我们所说的矩阵形式的衍射理论。反之,[5]中衍射光场与开孔函数的表示方法互不相同,[5,6]中均未证明其光场表示是否普遍。因此,[5,6]中虽可使某一种特殊衍射场的(一次衍射)计算取矩阵形式,却并未导致我们所说的,较普遍、较完全的、衍射的矩阵理论。

第二、作为一个实用的衍射的矩阵理论,必须能在普遍情形下证明:衍射矩阵可近似截取为有穷阶,并严格求出所取阶数下的误差上限,从而定出所需阶数。本文光场表示方法中,每一元模场仅局限于一环形区域内。不仅是从描述场分布的角度看(2.19)可简化为(2.21);即为描述场分布,可近似地只用有穷个元模(我们称此为条件(a))。而且特别要强调的是:由于场作用是一种接触作用,而何任系统所能涉及的场的空间区域(垂直光传播轴平面上)总是有限的。因此,在最普遍情形下,任何系统的作用都近似只与(2.19)中的有穷个分量有关(条件(b))。可以证明:当一个光场表示同时满足条件(a)、(b)时,我们就能够据无穷维线性赋范空间线性算子的性质,严格证明衍射矩阵可截取为有穷阶,并求截取后的误差上限以定出所需阶数。应该注意,当光场用无穷级数来表示时,虽然只要该级数收敛,条件(a)便可满足,但是能否在普遍情形下满足条件(b)却还需证明。并且这个证明往往是比较复杂和困难的。因此,并不是所有的光场级数表示式,都能导致衍射矩阵可截取为有截阶,更不一定能像本文方法这样,通常都能导致衍射矩阵收敛性质较好,而且往往能够直观、迅速取定所需阶数。

第三、如果光场级数表示中,须取项数过多,那么,即使用电子计算机,矩阵公式也难于实际应用。本文光场表示式却比较简便。比较本文(2.5)~(2.6)与[6]中光场表示式(2),本质的差别只是本文(2.8)中引入了一个参照高斯光场 $u_c(\xi^2, z)$ ——仅仅是一个公因子。可是它却使本文场表示式较[2,6,8]简便得多。例如:

(a) 适当选择(2.2)式的 $q$ 值,本文方法便于描述一般标量场的位相分布,而[6]中(2)式实际上只宜描述平面波,[5]中(2)式(实即傅里叶级数)实际上只宜用来表示某些特殊的光瞳函数(平面波入射时)。例如,为近似描写距点源 $z_0 = 10\text{cm}$ 处平面屏上,半径

$a = 1\text{cm}$  共轴圆孔内的球面波位相分布:  $\exp(ikr) = \exp(ik \sqrt{(1 + \frac{1}{n})z_0^2 + (\rho^2 - z_0^2/n)})$

取  $k = 10^5 \text{ cm}^{-1}$ ,  $q^{-1} = \frac{ik}{z_0(1 + \frac{1}{n})^{1/2}}$ ,  $n = 2z_0^2$ , 本文表示式(2.7)(取  $sl = 0$ )中仅须取不

足10项。但若用[6]的(2)式, 却须约6800项左右。若也只用10项, [6]的(2)式只能近似表示上述平面屏上  $\rho \leq 0.035 \text{ cm}$  区域内的位相分布——总位相变化仅约  $2\pi$ 。同时因上述圆孔内光场最小结构线度为  $\Delta(\frac{\rho^2}{a^2})|_{\min} \approx \frac{\lambda z_0}{2a^2} \approx 3 \times 10^{-4}$ , 而最大结构线度为

$\Delta(\frac{\rho^2}{a^2})|_{\max} \approx \frac{a^2}{a^2} = 1$ 。故若用[5]中(2)式或离散傅里叶变换(取  $\rho$  为变量)表示圆孔内球面波的位相分布或讨论其衍射时, 估计约须取3000—6000项。

至于[5]中的衍射场表示式, 不但变换麻烦, 而且可以肯定, 用它来表示上述开孔内的位相分布必是很不方便的。因为一般说来, 为表示每一结构——一个峰, 必须至少用它的二个基本函数来叠加。

(b) 当须讨论的空间区域显著大于场显异于零的区域时, 本文方法更为合理、简便。由于本文元模场只局限于一定的空间区域, 故若  $q$  选择适当, 本文场表示式中所须项数便可与须讨论区域的增大无关。但在[2, 5, 6]中, 所用基本函数均蔓延于无限大的空间区域, 故一般情况下, 他们描述一个光场所需的项数, 都随着须讨论区域的增大而增加。因此, 当需要近似描述全平面上的场分布时, 用本文方法仍只须取用有穷项(或有穷个元模), 而用[5]中的傅里叶级数或[6]中的泰勒级数时, 若须取讨论区域无穷大, 则须取项数也无穷多。

由此可见, 已知本文方法表示的场分布时, 容易通过求解波动方程的边值问题, 求得场的三维分布。特别是因为本文元模容易写为波动方程近似解(3.1)的线性组合, 事情便更加方便——从而, 例如, 就可以依据赫姆霍兹——基尔霍夫积分定理, 讨论一般标量场的衍射问题。——反之, [5, 6]中的光场表示式就没有这个方便。

(c) 由于本文方法中  $q$  可自由选择, 便具有较大灵活性; 而且由于所用元模函数要较[2, 5, 6]中的基本函数更符合一般场分布的规律。故描述场分布(不是指光瞳函数)时一般都能比较简便。例如激光束虽较近平面波, 其场分布用本文方法表示时, 仍显然要比用[2, 5, 6]的方法简便。

此外, 本文中光场虽以一组离散数据表示, 但这组数据却能直观反映场分布的对称性质(这一点本质上与[6]一样), 及场分布的空间局限性质(这一点比[2, 5, 6]都要优越)。因此所得结果的分析与应用均较方便。

## 参 考 文 献

- [1] M.Born & E.Wolf, *Principles of Optics*, 4-th edition, Pergamon Press, New York, (1975).
- [2] J.W.Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, McGraw-Hill Book Company New York (1968).
- [3] E.W.Marchand & E.Wolf, *J.O.S.A.*, 56, (1966), 1712.
- [4] H.Kogelnik & T. Li, *Applied Optics*, 5 (1966), 1550.
- [5] M.Novotný, *Optica Acta*, 24 (1977), 551.
- [6] J.Lomrska, *Optica Acta*, 26 (1979), 173.
- [7] G.Szegö, *Orthogonal Polynomials*, American Mathematical Society colloquium Publications, Vol. XXII (1939).
- [8] G.Sansone, *Orthogonal Functions*, Interscience Publishers, INC, New York (1959).

## A Matrix Theory for Diffraction of a Scalar Light Field by Plane Screens

### I. The Light Field Representation

Li Xian shu

#### Abstract

A new method of the representation of a scalar light field is proposed in this paper. It is also shown that this method can be adopted for representing the scalar light field over a very extensive range. In comparison with the previous methods<sup>(2,5,6)</sup>, the advantages of the present method are as follows: It may be more conveniently used in an extensive range. It can be surely concluded that in general cases the matrix characterising the action of the optical system can be truncated to finite order within any given errors. It can display explicitly the symmetries and restrictions on space range of the light field distribution and may be also used to represent the three dimensional distributions of the field in the free space.

In this representation, the light field distribution in a plane orthogonal to the light propagation axis expressed by an element in the sequence space  $l_1$ , and the optical system therefore may be represented by an action matrix. In the scope of linear optics, this matrix is independent of the incident and the diffraction field. In this paper the relations between the action matrix of the resultant optical system and the action matrices of constituent systems are also given.